MATHÉMATIQUES

(Option générale)

DURÉE : 2 heures

Sont autorisées : toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm × 15 cm.

Note importante : les réponses non justifiées (par une démonstration ou un résultat précis du cours) ne seront pas prises en compte.

La qualité de la rédaction (présentation, orthographe, rigueur) entrera pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Une feuille de papier millimétré sera distribuée.

Tournez la page S.V.P.

PREMIER PROBLÈME

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Première Partie

Soit f l'application linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans lui-même dont la matrice est M dans la base canonique.

1. Soient $X = (x, y, z)$ et $X' = (x', y', z')$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$. On suppose que l'on a $X' = f(X)$. Exprimer x', y' et z' en fonction de x, y et z.

2. a) Déterminer le noyau de f c'est à dire le sous-espace vectoriel K de $\mathbb{R}^3$ constitué des vecteurs X vérifiant $f(X) = (0, 0, 0)$. En donner une base et la dimension.
   b) Déterminer le sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^3$ constitué des vecteurs $f(X)$, pour X élément quelconque de $\mathbf{R}^3$. En donner une base et la dimension.

3. K et E sont-ils supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$?

Deuxième Partie

On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $N^{n+1} = N^n \times N$; avec la convention $N^0 = I$.

1. Vérifier que $N^2 = -2N + 3I$.

2. Montrer qu'il existe deux suites (u_n) et (v_n) telles que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ N^n = u_n N + v_n I \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_{n+1} = -2u_n + v_n \\ v_{n+1} = 3u_n \end{cases}$$

   (On pourra procéder par récurrence.)

3. Soit n un entier naturel quelconque.
   a) Vérifier la relation $u_{n+1} + v_{n+1} = u_n + v_n$.
   b) En déduire que l'on a : $u_{n+1} = -3u_n + 1$.
   c) Démontrer que la suite $\left(u_n - \frac{1}{4}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

4. Exprimer u_n, v_n et N^n en fonction de n.

DEUXIÈME PROBLÈME

Première Partie

Une urne contient 7 boules : 5 boules blanches et 2 boules noires.
Un joueur extrait simultanément deux boules de l'urne.

1. Calculer la probabilité qu'il tire deux boules blanches.

2. Le joueur participe maintenant au jeu suivant :
   - s'il tire deux boules blanches il gagne x francs ($x \geq 0$) ;
   - s'il tire deux boules noires il perd $10\,x$ francs ;
   - s'il tire une boule blanche et une boule noire, il procède à un second tirage de deux boules, sans remettre les deux premières boules tirées :

     à l'issue de ce second tirage il gagne y francs s'il tire deux boules blanches, sinon il perd 3 francs.

   On désigne par G la variable aléatoire dont les valeurs sont égales aux gains (positifs ou négatifs) du joueur.
   a) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire G.
   b) Calculer, en fonction de y, l'espérance mathématique de la variable aléatoire G. Déterminer y pour que le jeu soit équitable, c'est à dire $E(G) = 0$.
   c) Pour cette valeur de y, calculer l'écart-type $\sigma(G)$ de la variable G en fonction de x.

Deuxième Partie

Soit la fonction f, définie pour tout réel x, par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{110x^2 + 60}{21}}$$

1. Déterminer le réel α tel que $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - \alpha x] = 0$.
   Quel est le signe de $f(x) - \alpha x$ pour $x \geq 0$?

2. Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative (C) et ses asymptotes dans un repère orthonormé (unité : 1,5 cm).

3. Déterminer l'entier naturel x pour lequel l'écart-type $\sigma(G)$ de la première partie est compris entre 7 et 8.